Tema 4

LA UTILIDAD

Breve introducción

Las preferencias del consumidor pueden representarse matemáticamente mediante una función de utilidad. Esta última asigna un número (el nivel de utilidad) a cada cesta de bienes. De forma que cestas indiferentes dentro de las preferencias del consumidor tienen el mismo nivel de utilidad; y cestas preferidas a otras tienen mayor nivel de utilidad. Lo importante, pues, de la función de utilidad es que permite representar matemáticamente las preferencias del consumidor *ordenando las cestas de bienes*. La cuantía o magnitud del nivel de utilidad asignado a cada cesta de bienes no tiene ninguna importancia.

Tema 4

LA UTILIDAD

Resumen

La función de utilidad no es más que una forma matemática de describir las preferencias del consumidor, las cuales conllevan la posibilidad por parte de este último de establecer un orden de prelación para todas las cestas de bienes imaginables.

Por este motivo, la función de utilidad lo que hace es asignar un número u (el nivel de utilidad) a cada cesta de bienes (x_1, x_2):

$$u = u(x_1, x_2)$$

De manera que:

- Dos cestas indiferentes dentro de las preferencias del consumidor tengan el mismo nivel de utilidad:

$$u(x_1, x_2) = u(y_1, y_2) \quad \Leftrightarrow \quad (x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$$

- Y una cesta estrictamente preferida a otra tenga un nivel de utilidad mayor:

$$u(x_1, x_2) > u(y_1, y_2) \quad \Leftrightarrow \quad (x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$$

Lo importante de la función de utilidad es que permite *representar matemáticamente* las preferencias del consumidor *ordenando las cestas de bienes*. La cuantía o magnitud del nivel de utilidad de dos cestas de bienes no tiene ninguna importancia, lo único importante es si ambos niveles de utilidad correspondientes a sendas cestas de bienes son iguales (cestas de bienes indiferentes), o si uno es mayor que otro (una cesta de bienes estrictamente preferida a otra).

Por este motivo, las mismas preferencias del consumidor pueden ser representadas matemáticamente po utilidad sea una

transformación monótona creciente de otra función de utilidad que represente tales preferencias.

Decimos que la función de utilidad $v = v(x_1, x_2)$ es una transformación monótona creciente de la función de utilidad $u = u(x_1, x_2)$ que representa las preferencias del consumidor:

$$v = f(u)$$

si la función $f(u)$ es creciente, esto es, si su primera derivada es positiva: $f'(u) > 0$.

Ello quiere decir que, dadas dos cestas cualesquiera de bienes con los siguientes niveles de utilidad u_1 y u_2, tal que $u_1 < u_2$, de manera que $u_2 - u_1 = \Delta u > 0$; entonces resulta que $\Delta v = v_2 - v_1 > 0$, esto es, $v_1 < v_2$.

En resumen, si dos cestas cualesquiera de bienes tienen el mismo nivel de utilidad en la función de utilidad *u*, también tendrán el mismo nivel de utilidad en la función de utilidad *v*. Aunque, lógicamente, por tratarse de funciones utilidad distintas, los niveles de utilidad de las cestas de bienes en *u* y en *v* sean también distintos. Y si una cesta tiene un mayor nivel de utilidad que otra en la función de utilidad *u*, también tendrá un mayor nivel de utilidad en la función de utilidad *v*.

Por todo ello, podemos concluir, que una transformación monótona creciente de una función de utilidad no es más que otra función de utilidad que representa las mismas preferencias del consumidor que la función de utilidad de partida, *dado que mantiene la misma ordenación de las cestas de bienes* dentro de las preferencias del consumidor.

Construcción de una función de utilidad

- Para poder diseñar una función de utilidad que represente las preferencias del consumidor es requisito imprescindible que esta últimas sean transitivas. De lo contrario, no podrá establecerse ninguna función de utilidad que represente tales preferencias.
- Si las preferencias son monótonas (requisito fundamental de las preferencias regulares) entonces la diagonal del primer cuadrante corta a las curvas de indiferencia exactamente una vez. Con lo que a las cestas compuestas por una misma cantidad de ambos bienes

(precisamente las situadas en la diagonal principal), que se encuentran en sucesivas curvas de indiferencia cada vez más alejadas del origen de coordenadas, se les asigna un número, precisamente su correspondiente nivel de utilidad, que guarda relación con la distancia a la que se encuentran del origen de coordenadas. De este modo, todas las cestas de bienes, las situadas en la diagonal principal y las situadas a lo largo de las curvas de indiferencia que cortan la diagonal principal, tienen asignado un número (el nivel de utilidad). Y éste es precisamente el papel que cumple cualquier función de utilidad.

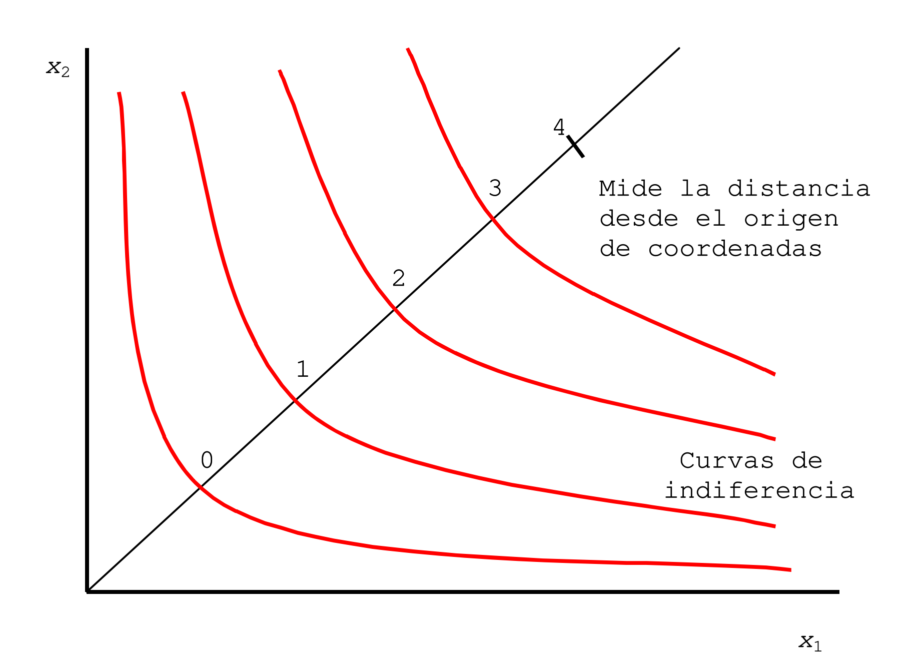


Figura 4.1. Cómo se construye una función de utilidad a partir de las curvas de indiferencia

Las utilidades marginales y la RMS

Partiendo de la función de utilidad $u = u(x_1, x_2)$, calculemos la diferencial total de esta función:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 = UM_1 dx_1 + UM_2 dx_2$$

Puesto que nos estamos moviendo a lo largo de una curva de indiferencia, el nivel de utilidad no varía ($d\iota$

$$RMS = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{UM_1}{UM_2}$$

Esto es, la RMS es igual al cociente, cambiado de signo, de las utilidades marginales de ambos bienes.

Sabemos que no existe una única función de utilidad que represente las preferencias de un determinado consumidor, dado que cualquier transformación monótona creciente de una función de utilidad es otra función de utilidad que representa las mismas preferencias de aquél.

Por este motivo, las utilidades marginales de ambos bienes, puesto que dependen directamente de la función de utilidad que estemos manejando, no resultan invariantes ante una transformación monótona creciente de la función de utilidad.

Sin embargo, es una propiedad fundamental de las preferencias del consumidor, que la RMS permanece inalterada ante cualquier transformación monótona creciente de la función de utilidad. Por consiguiente, *dos funciones de utilidad cualesquiera representan las mismas preferencias del consumidor, esto es, una de ellas es una transformación monótona creciente de la otra, si y sólo si las relaciones marginales de sustitución obtenidas a partir de ambas funciones de utilidad son idénticas.*

Algunos ejemplos de funciones de utilidad

En este apartado vamos a caracterizar las funciones de utilidad a partir de sus correspondientes curvas de indiferencia, así como la RMS resultante, de forma que permita interpretar el tipo de preferencias a las que están haciendo referencia.

Las curvas de indiferencia de una función de utilidad son, desde un punto de vista matemático, las curvas de nivel de tal función. Es decir, el lugar geométrico de las cestas de bienes que tienen asignado un determinado nivel de utilidad. La función de utilidad se representa, pues, gráficamente a partir de las distintas curvas de indiferencia asociadas a cada uno de los niveles de utilidad. Este conjunto de curvas de indiferencia recibe también el nombre de nombre de mapa de indiferencia de la función de utilidad o de las preferencias del consumidor en cuestión.

Bienes sustitutivos perfectos

Se representan mediante la siguiente función de utilidad:

$$u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$$

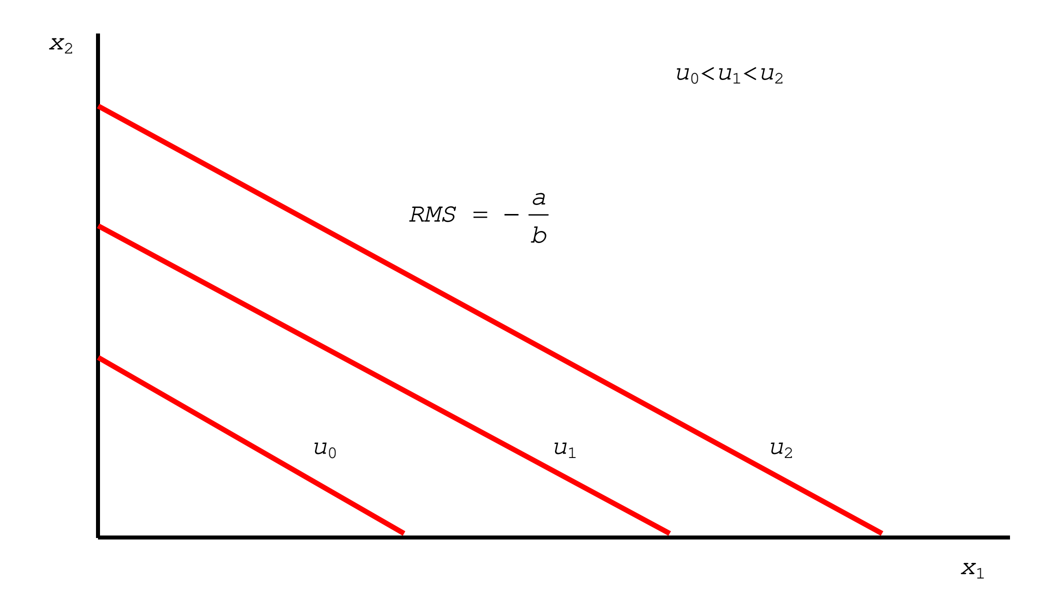


Figura 4.2. Los bienes sustitutivos perfectos

La RMS es la siguiente:

$$RMS = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{UM_1}{UM_2} = -\frac{a}{b}$$

Las curvas de indiferencia son líneas rectas decrecientes de pendiente constante e igual a $-a/b$.

En el caso particular en que a=b=1, entonces $|RMS| = 1$. El consumidor está dispuesto a cambiar una unidad de un bien por una unidad del otro para permanecer dentro de la misma curva de indiferencia.

Por consiguiente, estaríamos ante bienes tales como los lápices rojos y lápices azules, o la mantequilla y la ... al consumidor le

resulta indiferente demandar uno u otro, por lo que siempre consumirá el más barato. De ahí que se denominen a tales bienes sustitutivos perfectos.

Bienes complementarios perfectos

Se representan mediante la siguiente función de utilidad:

$$u(x_1, x_2) = \min\left\{\frac{x_1}{\alpha}, \frac{x_2}{\beta}\right\}$$

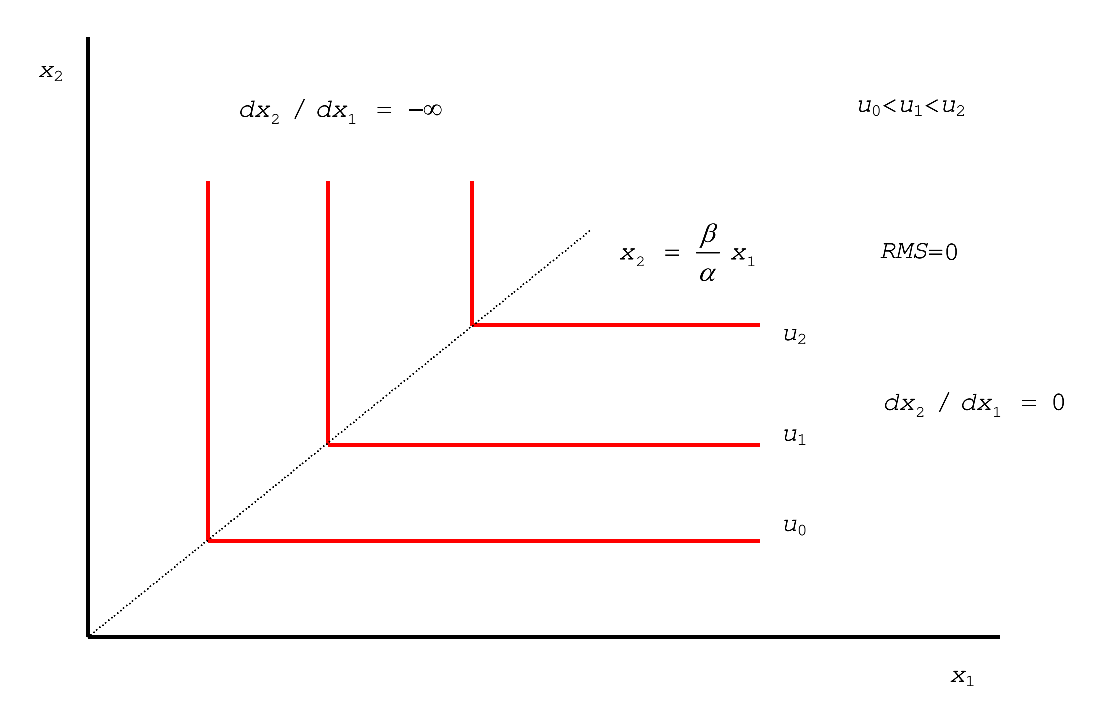


Figura 4.3. Los bienes complementarios perfectos

Cualquiera que fuere el nivel de utilidad considerado, la cantidad consumida de ambos bienes, sin que exista exceso de ninguno de ellos, para alcanzar ese nivel de utilidad, exige el cumplimiento de la siguiente condición: $\frac{x_1}{\alpha} = \frac{x_2}{\beta}$. Lo que implica que ambos bienes se consumen siempre en una proporción fija: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{\alpha}{\beta}$. α unidades del primer bien con β unidades del segundo bien. Y esta condición se cumple precisamente en las esquinas o puntos angulares de las curvas de indiferencia.

Efectivamente, en la rama vertical de las curvas de indiferencia, las cestas de mercancías contienen siempre una mayor cantidad del segundo bien (x_2), que no afecta al nivel de utilidad, en relación a la cantidad consumida de este último en el punto angular de la curva de indiferencia de que se trate. Por este motivo, en la rama vertical de las curvas de indiferencia se cumple:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\infty \qquad dx_1 = 0\, dx_2$$

Esto es, el consumidor no está dispuesto a renunciar a ninguna cantidad del bien 1 con objeto de incrementar en una unidad la cantidad consumida del bien 2, para permanecer dentro de la misma curva de indiferencia. En otras palabras, el consumidor no está dispuesto a demandar las cestas de bienes situadas en la rama vertical de las curvas de indiferencia, cuando los precios son positivos.

En la rama horizontal de las curvas de indiferencia, las cestas de mercancías contienen siempre una mayor cantidad del primer bien (x_1), que no afecta al nivel de utilidad, en relación a la cantidad consumida de este último en el punto angular de la curva de indiferencia de que se trate. Por este motivo, en la rama horizontal de las curvas de indiferencia se cumple:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = 0 \qquad dx_2 = 0\, dx_1$$

Esto es, el consumidor no está dispuesto a renunciar a ninguna cantidad del bien 2 con objeto de incrementar en una unidad la cantidad consumida del bien 1, para permanecer dentro de la misma curva de indiferencia. En otras palabras, el consumidor no está dispuesto a demandar las cestas de bienes situadas en la rama horizontal de las curvas de indiferencia, cuando los precios son positivos.

Por consiguiente, el consumidor únicamente demandará las cestas de bienes situadas en las esquinas o puntos angulares de las curvas de indiferencia, donde ambos bienes se consumen en una proporción fija, como venimos diciendo, cuando los precios son positivos.

Esto quiere decir que la *RMS es siempre cero para los bienes complementarios perfectos*; dado que, como hemos argumentado, el consumidor no está dispuesto a intercambiar o susti-

tuir un bien por otro, puesto que prefiere consumir ambos bienes en una proporción fija. No obstante, en las esquinas o puntos angulares de las curvas de indiferencia, la pendiente de estas últimas no está definida.

Un ejemplo típico de esta clase bienes es el té y el azúcar, o el café y el azúcar, o los coches y la gasolina. Estos pares de bienes siempre se consumen juntos en una proporción fija, no puede sustituirse uno por otro. Son pares de bienes que se complementan uno a otro. De ahí el nombre de bienes complementarios perfectos.

Bienes neutrales

Un bien se considera neutral cuando la cantidad consumida de ese bien no afecta al nivel de utilidad del consumidor, el cual sólo depende de la cantidad consumida del otro bien.

Las preferencias del consumidor pueden representarse, por ejemplo, mediante la siguiente función de utilidad:

$$u\left(x_1, x_2\right) = ax_1$$

El segundo bien es neutral.

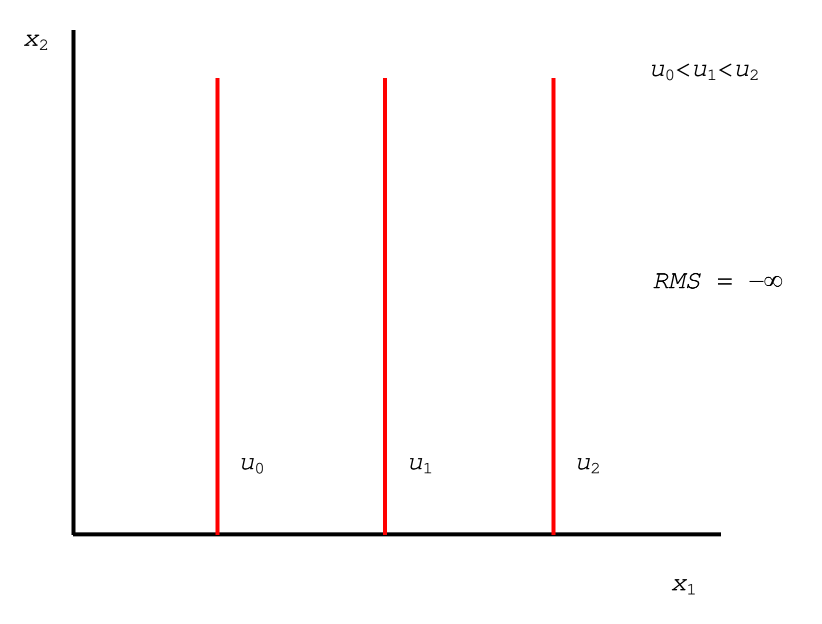


Figura 4.4. Segundo bien neutral

La RMS es la siguiente:

$$RMS = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{UM_1}{UM_2} = -\frac{a}{0} = -\infty$$

Las curvas de indiferencia son líneas rectas verticales, paralelas unas a otras. Al consumidor le da igual consumir el segundo bien, eso no afecta a su nivel de utilidad.

Males

Una mercancía se considera un "mal" en lugar de un bien, cuando el consumo de la misma reduce el nivel de utilidad del consumidor.

Consideremos que la primera mercancía es un "bien" y la segunda un "mal". Las preferencias del consumidor pueden representarse, por ejemplo, mediante la siguiente función de utilidad:

$$u\left(x_1, x_2\right) = ax_1 - bx_2$$

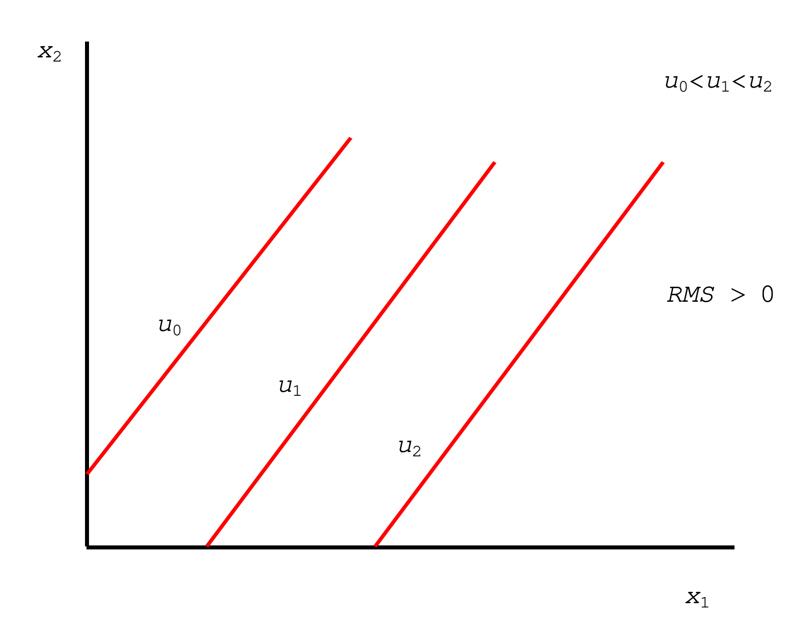


Figura 4.5. Segunda mercancía un mal

La RMS es la siguiente:

$$RMS = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{UM_1}{UM_2} = \frac{a}{b} > 0$$

Las curvas de indiferencia son líneas rectas crecientes, paralelas unas a otras. Si permanece constante el consumo del bien 2, a medida que aumenta el consumo del bien 1 (desplazamiento hacia la derecha) se incrementa el nivel de utilidad del consumidor; lo contrario sucede cuando permaneciendo constante el consumo del bien 1, se incrementa el consumo del bien 2 (desplazamiento hacia arriba), entonces se reduce el nivel de utilidad del consumidor. Por consiguiente, para que el nivel de utilidad del consumidor permanezca constante de forma que nos estemos moviendo a lo largo de una curva de indiferencia, debe suceder que un aumento del consumo del bien 1 ha de compensarse con un aumento del consumo del "mal" 2. De ahí que las curvas de indiferencia sean paradójicamente crecientes, contrariamente a lo que es normal en un mundo en que ambas mercancías son "bienes".

Una mercancía se considera un "mal" en lugar de un "bien" para el consumidor, si le perjudica, o simplemente no le gusta tal mercancía.

Preferencias cuasilineales

Se representan, por ejemplo, mediante la siguiente función de utilidad:

$$u(x_1, x_2) = \ln x_1 + bx_2$$

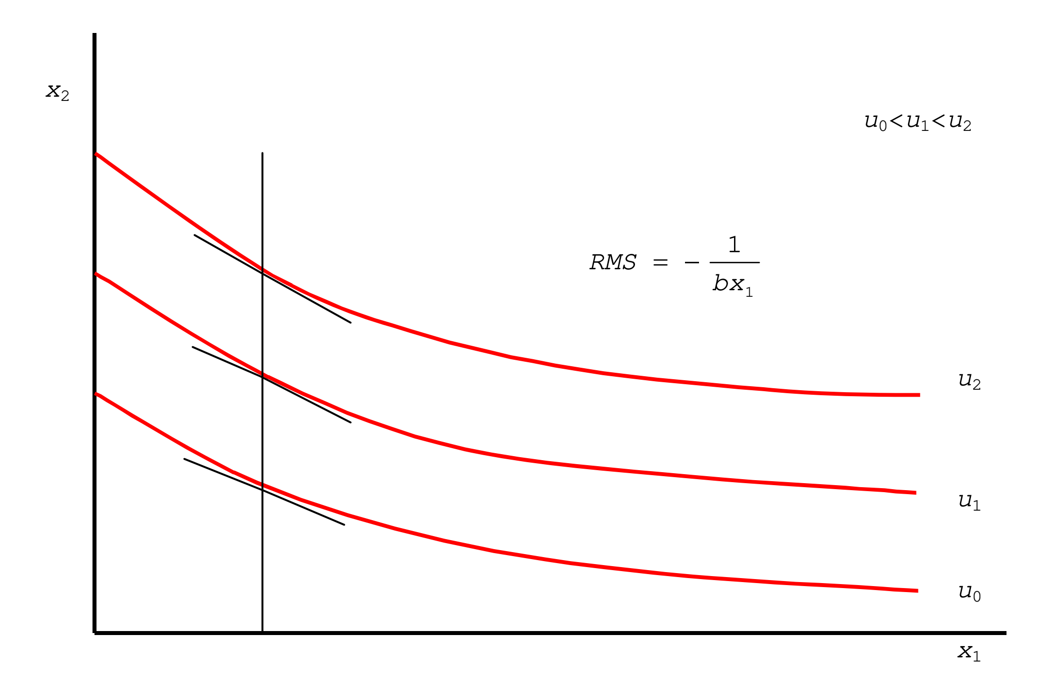


Figura 4.6. Preferencias cuasilineales

La RMS es la siguiente:

$$RMS = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{UM_1}{UM_2} = -\frac{1}{bx_1}$$

Como puede observarse, la RMS depende únicamente de la cantidad consumida del bien 1 (x_1). De ahí que fijada la cantidad consumida de este último bien, la RMS, esto es, la pendiente de las curvas de indiferencia, permanece inalterada conforme nos desplazamos verticalmente hacia arriba, es decir, a medida que aumentamos la cantidad consumida del bien 2. Por este motivo, las curvas de indiferencia correspondientes son "traslaciones verticales" o "versiones desplazadas" unas de otras.

En el próximo tema se caracterizará la elección del consumidor que se deriva de este tipo de preferencias.

Preferencias Cobb-Douglas

Se representan mediante la siguiente función de utilidad:

$$u(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d$$

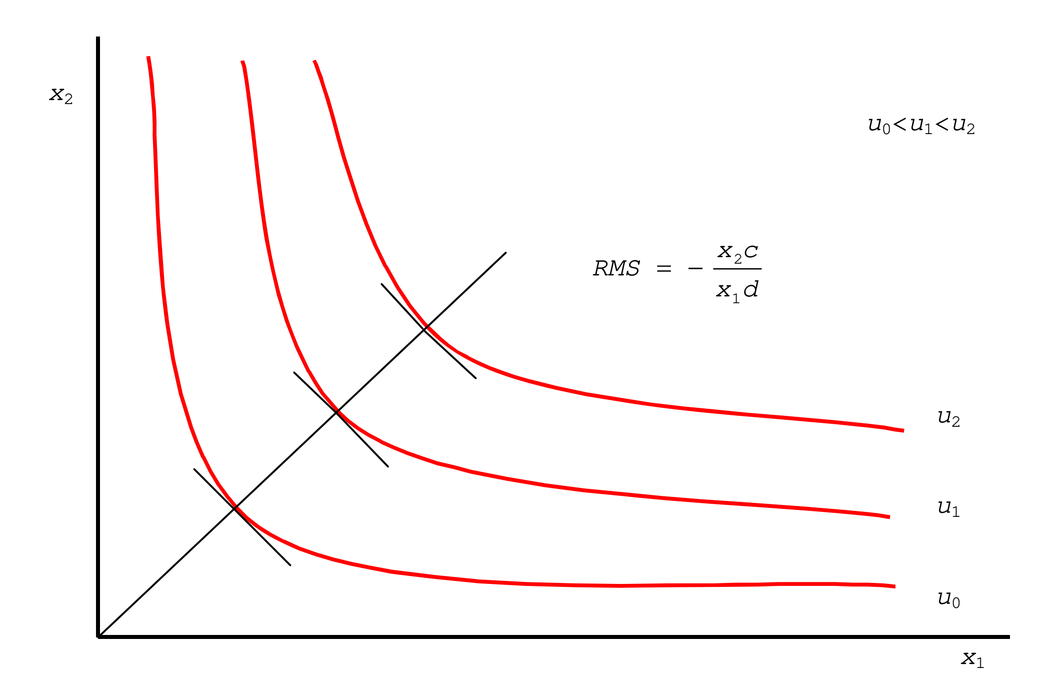


Figura 4.7. Preferencias Cobb-Douglas

La RMS es la siguiente:

$$RMS = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{UM_1}{UM_2} = -\frac{cx_1^{c-1}x_2^d}{dx_1^c x_2^{d-1}} = -\frac{x_2 c}{x_1 d}$$

A partir de aquí puede inferirse que las curvas de indiferencia poseen una curvatura regular, es decir, carecen de segmentos lineales. Esto es debido a que la RMS (la pendiente de las curvas de indiferencia) varía continuamente al variar la *proporción* en que son consumidos ambos bienes. Son el ejemplo típico de preferencias regulares: monótonas y estrictamente convexas.

Además, cualquier rayo vector que parte del origen de coordenadas, cuya pendiente es x_2/x_1, esto es, la proporción en que se consumen ambos bienes, corta respectivamente a las sucesivas curvas de indiferencia en puntos tales que la RMS permanece inalterada.

En el próximo tema se caracterizará la elección del consumidor que se deriva de este tipo de preferencias.

UN "MAL" EN UNA FUNCIÓN DE UTILIDAD COBB-DOUGLAS

Consideremos otro ejemplo de función de utilidad del tipo Cobb-Douglas en la que uno de los bienes es un "mal":

$$u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{-b}$$

donde *a* y *b* son parámetros positivos.

Estudiemos esta función de utilidad:

a) Es evidente que el nivel de utilidad del consumidor aumenta a medida que aumenta x_1. Luego la primera mercancía es efectivamente un bien para el consumidor.

b) Es evidente que el nivel de utilidad del consumidor disminuye a medida que aumenta x_2. Luego la segunda mercancía es un "mal" para el consumidor.

Obtengamos la relación marginal de sustitución:

$$RMS = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial u / \partial x_1}{\partial u / \partial x_2} = -\frac{a x_1^{a-1} x_2^{-b}}{-b x_2^{-b-1} x_1^a} = \frac{a x_2}{b x_1} > 0$$

Luego *las curvas de indiferencia son líneas crecientes*.

Estudiemos ahora su curvatura. Para ello veamos cómo varía la RMS, puesto que se trata de la pendiente de las curvas de indiferencia, a medida que varía la cantidad consumida del bien 1:

$$\frac{\partial RMS}{\partial x_1} = \frac{d^2 x_2}{dx_1^2} = \frac{a}{b} \frac{\frac{dx_2}{dx_1} x_1 - x_2}{x_1^2} = \frac{a x_2}{b^2 x_1^2}\left(a - b\right)$$

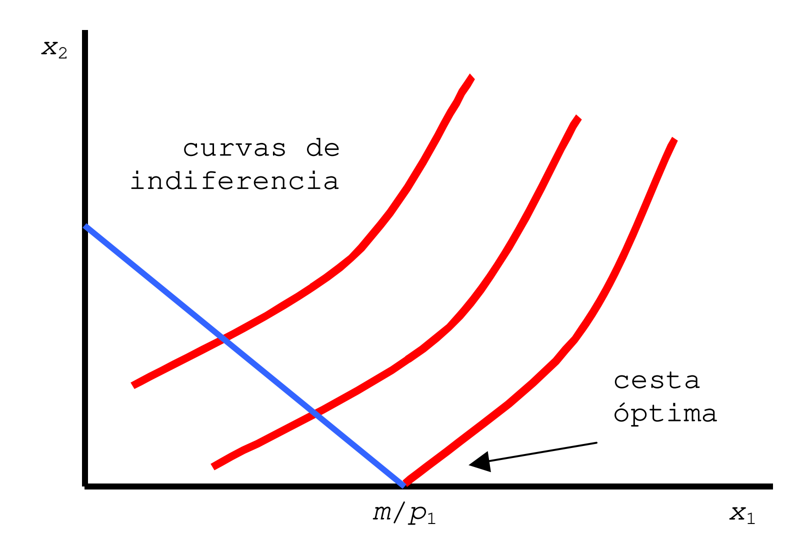
Por consiguiente, a la vista de esta expresión pueden presentarse tres casos:

a) Cuando $a > b$, tenemos $d^2x_2/dx_1^2 > 0$. Entonces las curvas de indiferencia son curvas convexas y tienen una curvatura regular, dado que la RMS, que es positiva, crece continuamente a medida que aumenta la cantidad consumida del bien 1.

b) Cuando $a = b$, tenemos $d^2x_2/dx_1^2 = 0$. Entonces las curvas de indiferencia son líneas rectas, dado que la RMS permanece constante a medida que aumenta la cantidad consumida del bien 1.

c) Cuando $a < b$, tenemos $d^2x_2/dx_1^2 < 0$. Entonces las curvas de indiferencia son curvas cóncavas y tienen una curvatura regular, dado que la RMS, que es positiva, decrece continuamente a medida que aumenta la cantidad consumida del bien 1.

Considerando las curvas de indiferencia correspondientes al caso *a* tendríamos el siguiente gráfico representativo de la elección óptima del consumidor:



No obstante, al ser las curvas de indiferencia líneas crecientes en los tres casos contemplados con anterioridad, *la cesta óptima es siempre una cesta de esquina* cualquiera que fuere el valor de los parámetros *a* y *b*. De forma que el consumidor siempre gasta toda su renta en adquirir el primer bien, y no consume nada de la segunda mercancía que es un “mal”:

$$x_1^* = m/p_1 \qquad x_2^* = 0$$

UTILIDAD CARDINAL Y UTILIDAD ORDINAL

Vamos a comparar ambas concepciones de la función de utilidad del consumidor, señalando sus respectivas características.

Utilidad cardinal

a) Exige establecer una escala, es decir, un *origen* y una *unidad de medida* del nivel de satisfacción del consumidor al consumir las diferentes cestas de bienes.

b) Por tanto, cada cesta de bienes lleva asociado un nivel de utilidad, esto es, el correspondiente nivel de satisfacción del consumidor al consumirla; y esto abarca todas las cestas de bienes imaginables.

c) La diferencia de utilidad entre dos cestas de bienes refleja la diferencia en el nivel de satisfacción del consumidor.

d) Elegido el *origen* y la *unidad de medida*, la función de utilidad que representa las preferencias del consumidor es única. No admite ninguna transformación monótona que no sea un cambio de la escala en que se miden las preferencias del consumidor (el origen y la unidad de medida).

e) La utilidad marginal es decreciente para cada bien.

La utilidad cardinal se basa en un supuesto restrictivo (la posibilidad de medir el nivel de satisfacción del consumidor), innecesario para estudiar el comportamiento de este último en un ambiente de certidumbre.

Utilidad ordinal

Tiene las siguientes características:

a) Requiere la *ordenación completa* de todas las cestas de bienes imaginables basándose en las preferencias del consumidor.

b) Conlleva la posibilidad de comparar dos cestas de bienes cualesquiera y de establecer el *orden de preferencia* de ambas cestas por parte del consumidor.

c) Cualquier transformación monótona creciente de una función de utilidad ordinal es otra función de utilidad ordinal que representa las mismas preferencias del consumidor, dado que mantiene *la misma ordenación de las cestas de bienes*.

d) La *utilidad marginal* depende de la función de utilidad elegida como representación de las preferencias del consumidor. La *relación marginal de sustitución* (RMS), en cambio, permanece inalterada ante una transformación monótona creciente de la función de utilidad.

e) La RMS entre dos bienes es decreciente a media que aumenta la cantidad consumida de uno de ellos. En cambio, las utilidades marginales de ambos bienes no tienen por qué ser decrecientes, salvo si se trata de una *función de utilidad aditiva*.

En este caso, la utilidad marginal correspondiente a cada bien depende exclusivamente de la cantidad consumida de ese bien, y no de la cantidad consumida del otro bien.

Tomemos como ejemplo de una función de utilidad aditiva la siguiente función de utilidad cuasilineal:

$$u(x_1, x_2) = \ln x_1 + bx_2$$

De aquí fácilmente se obtiene:

$$UM_1 = \frac{1}{x_1} \qquad UM_2 = b$$

Evidentemente, la utilidad marginal correspondiente al primer bien es decreciente a medida que aumenta el consumo de ese bien, y es independiente de la cantidad consumida del segundo bien. La utilidad marginal correspondiente al segundo bien constante.

La relación marginal de sustitución:

$$|RMS| = \frac{UM_1}{UM_2} = \frac{1}{bx_1}$$

es decreciente en valor absoluto a medida que aumenta la cantidad consumida del primer bien.

Tema 4

LA UTILIDAD

Glosario

Bienes complementarios perfectos:

Se representan mediante la siguiente *función de utilidad*:

$$u(x_1, x_2) = \min\left\{\frac{x_1}{\alpha}, \frac{x_2}{\beta}\right\}$$

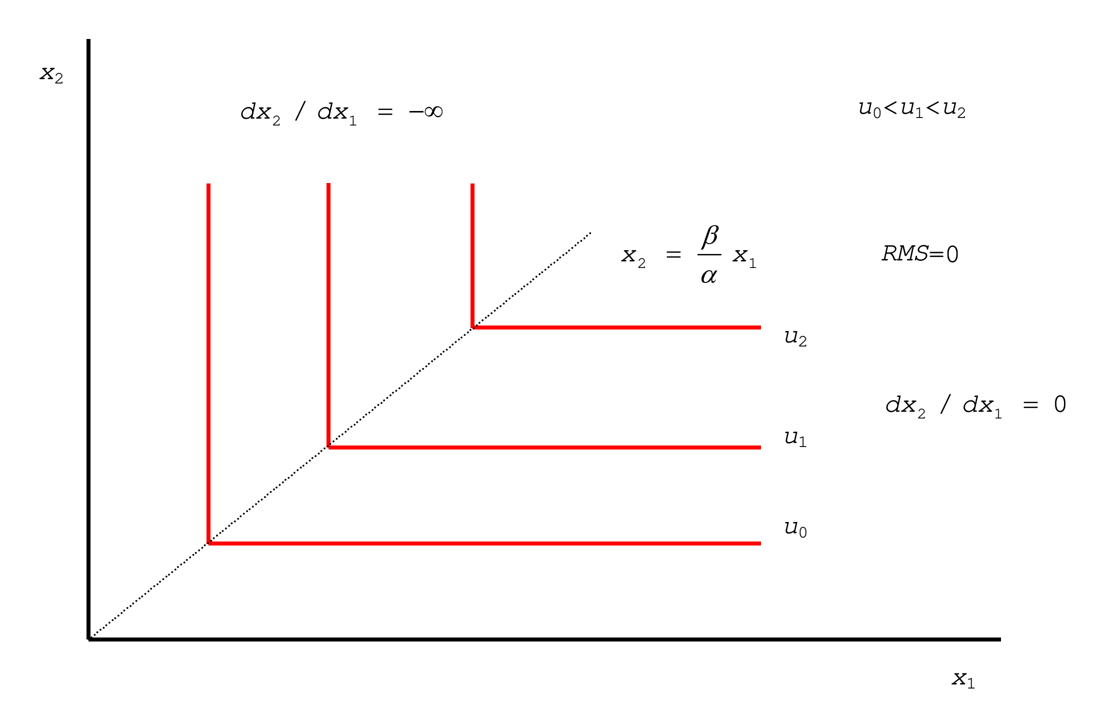


Figura 4.3. Los bienes complementarios perfectos

Cualquiera que fuere el nivel de utilidad considerado, la cantidad consumida de ambos bienes, sin que exista exceso de ninguno de ellos, para alcanzar ese nivel de utilidad, exige el cumplimiento de la siguiente condición: $\frac{x_1}{\alpha} = \frac{x_2}{\beta}$. Lo que implica que ambos bienes se consumen

siempre en una proporción fija: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{\alpha}{\beta}$. α unidades del primer bien con β unidades del segundo bien. Y esta condición se cumple precisamente en las esquinas o puntos angulares de las curvas de indiferencia.

Esto quiere decir que la *RMS es siempre cero para los bienes complementarios perfectos*; dado que el consumidor no está dispuesto a intercambiar o sustituir un bien por otro, puesto que prefiere consumir ambos bienes en una proporción fija. No obstante, en las esquinas o puntos angulares de las curvas de indiferencia, la pendiente de estas últimas no está definida.

Un ejemplo típico de esta clase bienes es el té y el azúcar, o el café y el azúcar, o los coches y la gasolina. Estos pares de bienes siempre se consumen juntos en una proporción fija, no puede sustituirse uno por otro. Son pares de bienes que se complementan uno a otro. De ahí el nombre de bienes complementarios perfectos.

Bienes neutrales:

Un bien se considera neutral cuando la cantidad consumida de ese bien no afecta al nivel de utilidad del consumidor, el cual sólo depende de la cantidad consumida del otro bien.

Las preferencias del consumidor pueden representarse, por ejemplo, mediante la siguiente *función de utilidad*:

$$u\left(x_1, x_2\right) = ax_1$$

El segundo bien es neutral.

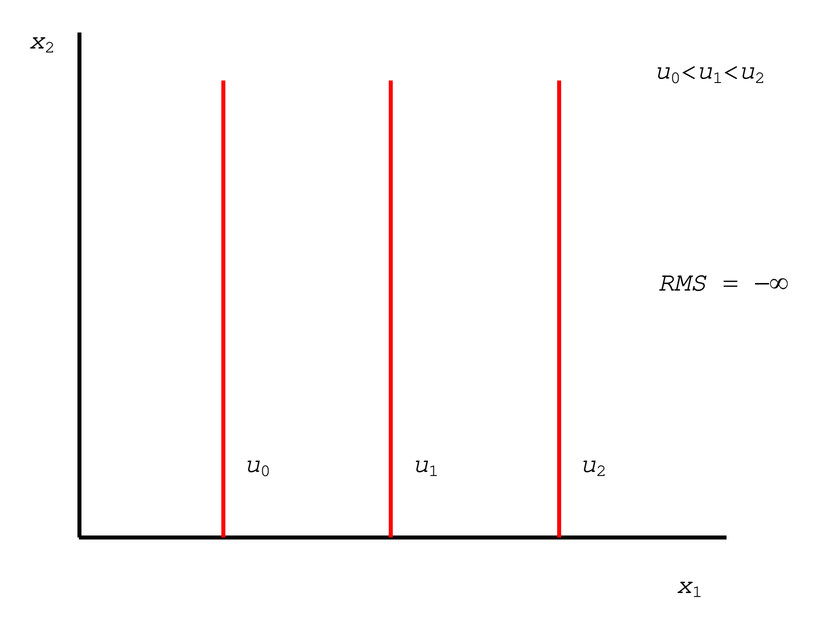


Figura 4.4. Segundo bien neutral

La *RMS* es la siguiente:

$$RMS = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{UM_1}{UM_2} = -\frac{a}{0} = -\infty$$

Las curvas de indiferencia son líneas rectas verticales, paralelas unas a otras. Al consumidor le da igual consumir el segundo bien, eso no afecta a su nivel de utilidad.

Bienes sustitutivos perfectos:

Se representan mediante la siguiente *función de utilidad*:

$$u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$$

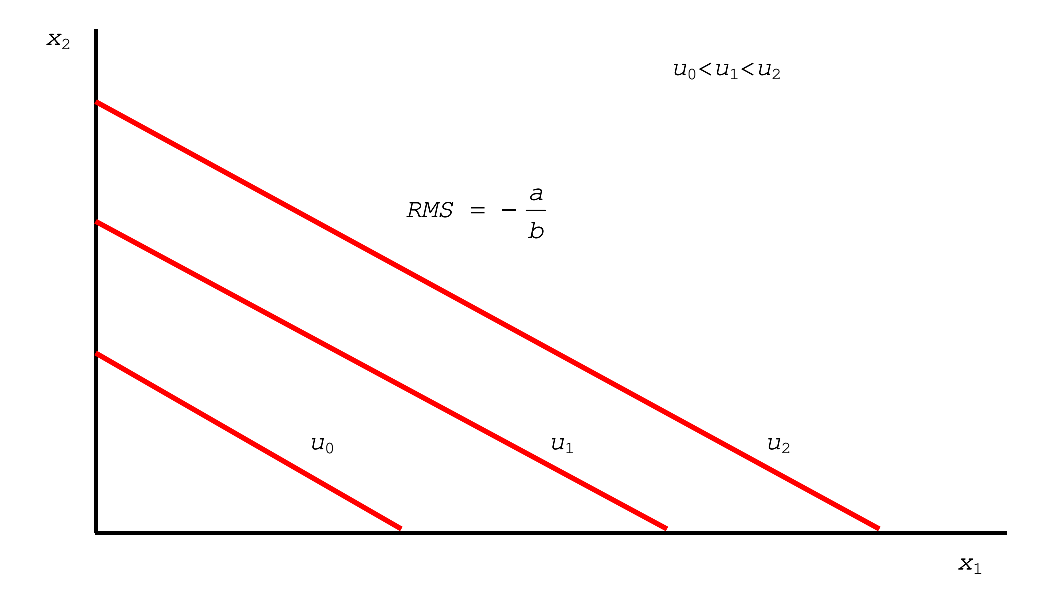


Figura 4.2. Los bienes sustitutivos perfectos

La *RMS* es la siguiente:

$$RMS = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{UM_1}{UM_2} = -\frac{a}{b}$$

Las *curvas de indiferencia* son líneas rectas decrecientes de pendiente constante e igual a $-a/b$.

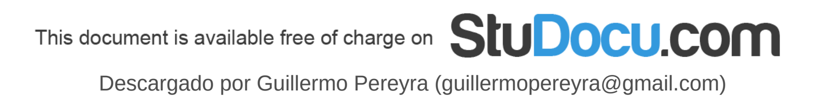
Se trata de bienes tales como los lápices rojos y lápices azules, o la mantequilla y la margarina, que satisfacen la misma necesidad; de forma que al consumidor le resulta indiferente demandar uno u otro, por lo que siempre consumirá el más barato. De ahí que se denominen a tales bienes sustitutivos perfectos.

Función de utilidad (ordinal):

No es más que una forma matemática de describir las preferencias del consumidor. La función de utilidad lo que hace es asignar un número u (el nivel de utilidad) a cada cesta de bienes (x_1, x_2):

$$u = u(x_1, x_2)$$

De manera que:



- Dos cestas indiferentes dentro de las preferencias del consumidor tengan el mismo nivel de utilidad:

$$u(x_1, x_2) = u(y_1, y_2) \quad \Leftrightarrow \quad (x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$$

- Y una cesta estrictamente preferida a otra tenga un nivel de utilidad mayor:

$$u(x_1, x_2) > u(y_1, y_2) \quad \Leftrightarrow \quad (x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$$

Lo importante de la función de utilidad es que permite representar matemáticamente las preferencias del consumidor *ordenando las cestas de bienes*. La cuantía o magnitud del nivel de utilidad de dos cestas de bienes no tiene ninguna importancia.

Por este motivo, las mismas preferencias del consumidor pueden ser representadas matemáticamente por infinitas funciones de utilidad.

Males:

Una mercancía se considera un “mal” en lugar de un bien, cuando el consumo de la misma reduce el nivel de utilidad del consumidor.

Consideremos que la primera mercancía es un “bien” y la segunda un “mal”. Las preferencias del consumidor pueden representarse, por ejemplo, mediante la siguiente *función de utilidad*:

$$u(x_1, x_2) = ax_1 - bx_2$$

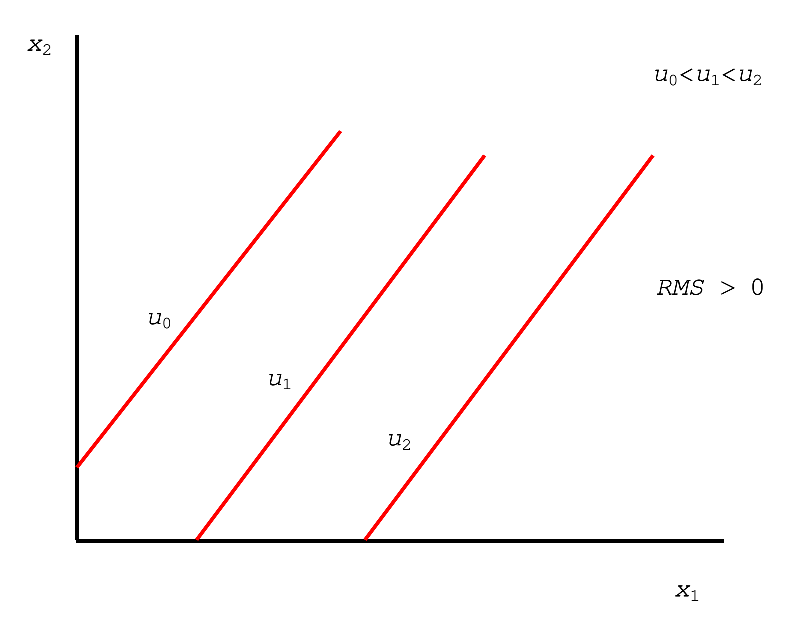


Figura 4.5. Segunda mercancía un mal

La *RMS* es la siguiente:

$$RMS = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{UM_1}{UM_2} = \frac{a}{b} > 0$$

Las *curvas de indiferencia* son líneas rectas crecientes, paralelas unas a otras.

Una mercancía se considera un "mal" en lugar de un "bien" para el consumidor, si le perjudica, o simplemente no le gusta tal mercancía.

Preferencias Cobb-Douglas:

Se representan mediante la siguiente *función de utilidad*:

$$u(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d$$

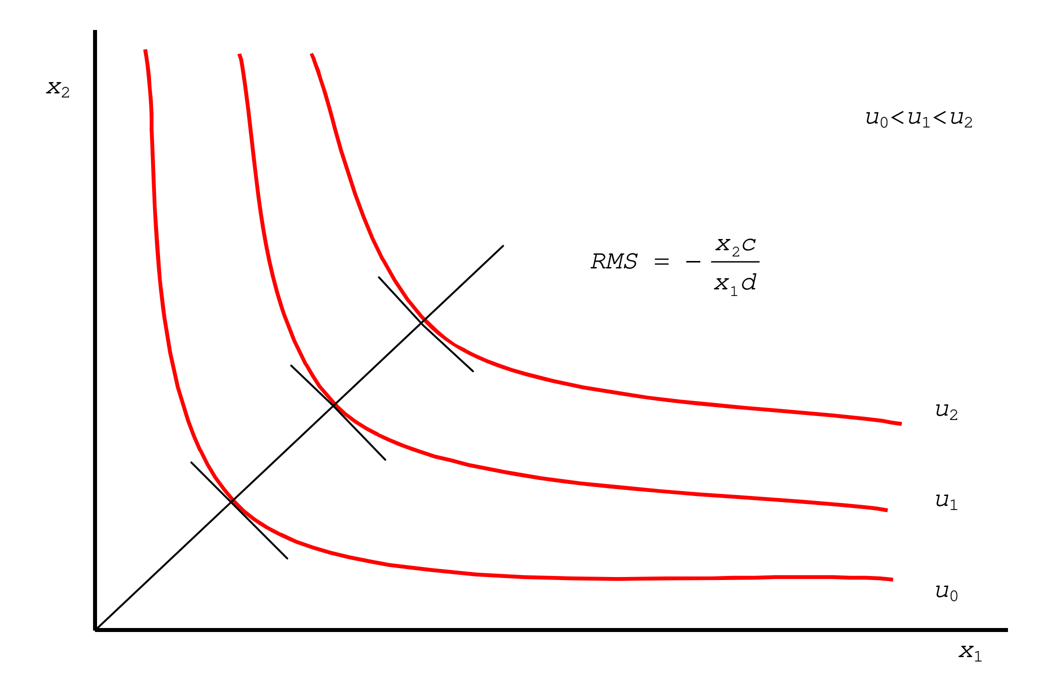


Figura 4.7. Preferencias Cobb-Douglas

La *RMS* es la siguiente:

$$RMS = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{UM_1}{UM_2} = -\frac{cx_1^{c-1}x_2^d}{dx_1^c x_2^{d-1}} = -\frac{x_2 c}{x_1 d}$$

A partir de aquí puede inferirse que las *curvas de indiferencia* poseen una curvatura regular, es decir, carecen de segmentos lineales. Esto es debido a que la RMS (la pendiente de las curvas de indiferencia) varía continuamente al variar la *proporción* en que son consumidos ambos bienes. Son el ejemplo típico de preferencias regulares: monótonas y estrictamente convexas.

Además, cualquier rayo vector que parte del origen de coordenadas, cuya pendiente es x_2/x_1, esto es, la proporción en que se consumen ambos bienes, corta respectivamente a las sucesivas curvas de indiferencia en puntos tales que la RMS permanece inalterada.

Preferencias cuasilineales:

Se representan, por ejemplo, mediante la siguiente *función de utilidad*:

$$u(x_1, x_2) = \ln x_1 + bx_2$$

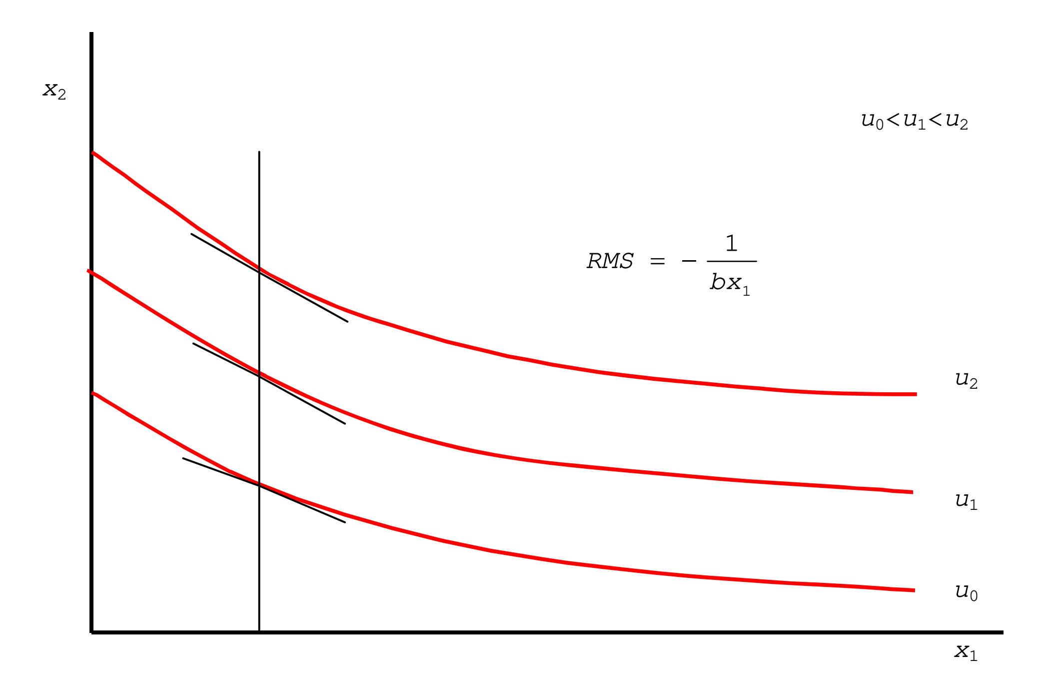


Figura 4.6. Preferencias cuasilineales

La *RMS* es la siguiente:

$$RMS = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{UM_1}{UM_2} = -\frac{1}{bx_1}$$

Como puede observarse, la RMS depende únicamente de la cantidad consumida del bien 1 (x_1). De ahí que fijada la cantidad consumida de este último bien, la RMS, esto es, la pendiente de las curvas de indiferencia, permanece inalterada conforme nos desplazamos verticalmente hacia arriba, es decir, a medida que aumentamos la cantidad consumida del bien 2. Por este motivo, las *curvas de indiferencia* correspondientes son "traslaciones verticales" o "versiones desplazadas" unas de otras.

Transformación monótona creciente de la función de utilidad:

No es más que otra función de utilidad que representa las mismas preferencias del consumidor que la función de utilidad de partida, *dado que mantiene la misma ordenación de las cestas de bienes.*

Decimos que la función de utilidad $v = v(x_1, x_2)$ es una transformación monótona creciente de la función de utilidad $u = u(x_1, x_2)$ que representa las preferencias del consumidor:

$$v = f(u)$$

si la función $f(u)$ es creciente, esto es, si su primera derivada es positiva: $f'(u) > 0$.

Ello quiere decir que, dadas dos cestas cualesquiera de bienes con los siguientes niveles de utilidad u_1 y u_2, tal que $u_1 < u_2$, de manera que $u_2 - u_1 = \Delta u > 0$; entonces resulta que $\Delta v = v_2 - v_1 > 0$, esto es, $v_1 < v_2$.

En resumen, si dos cestas cualesquiera de bienes tienen el mismo nivel de utilidad en la función de utilidad *u*, también tendrán el mismo nivel de utilidad en la función de utilidad *v*. Aunque, lógicamente, por tratarse de funciones utilidad distintas, los niveles de utilidad de las cestas de bienes en *u* y en *v* sean también distintos. Y si una cesta tiene un mayor nivel de utilidad que otra en la función de utilidad *u*, también tendrá un mayor nivel de utilidad en la función de utilidad *v*.

Una transformación monótona creciente de la función de utilidad deja inalterada la *Relación Marginal de Sustitución* (RMS), en cambio afecta a las *utilidades marginales* de los bienes.

Utilidad marginal:

Es la variación en el nivel de utilidad del consumidor cuando varía en una unidad la cantidad consumida de un bien, permaneciendo constante la cantidad consumida del otro.

Es la derivada parcial de la función de utilidad:

$$UM_j = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_j} \quad j = 1, 2$$

La utilidad marginal de un bien depende de la función de utilidad que estemos manejando. Por tanto, cualquier transformación monótona creciente de la función de utilidad afecta a las utilidades marginales de los bienes.

Tema 4

LA UTILIDAD

Preguntas más frecuentes

Utilidad ordinal versus utilidad cardinal

No acabo de comprender bien qué ventaja tiene el uso de la utilidad ordinal frente a la utilidad cardinal.

Es más fácil ordenar las cestas de bienes de acuerdo con las preferencias que medir el nivel de satisfacción del consumidor con cada cesta de bienes, lo cual es muy difícil.

Desde un punto de vista analítico, por tanto, es mucho menos restrictiva la utilidad ordinal que la utilidad cardinal. Por eso se utiliza la primera y no la segunda.

Utilidad cardinal: transformación monótona creciente

El problema entiendo que proviene del hecho de que la utilidad cardinal no se preserva mediante transformaciones monótonas crecientes, cosa que la utilidad ordinal sí.

No es eso en absoluto. En la utilidad cardinal, si cambiamos la *escala* en la que se miden las preferencias (el *origen* o la *unidad de medida* del nivel de satisfacción de consumidor) tenemos otra función de utilidad cardinal que representa las mismas preferencias. Es como si hubiéramos realizado una transformación monótona creciente. Ocurre algo parecido cuando al medir la temperatura cambiamos de la escala centígrada a la escala Fahrenheit, o a la inversa.

Utilidad cardinal: alteración del nivel de precios

Supongamos que los precios se multiplican por 2. Entiendo que este cambio no afectará a la utilidad ordinal; pero ¿cómo afecta esto a la utilidad cardinal?

No le afecta en absoluto, dado que la elección del consumidor, cualquiera que fuere la representación de la utilidad que se maneje, sólo viene afectada por los precios relativos y no por el nivel de precios.

Para ser más precisos hay que decir que la variación del nivel de precios, permaneciendo constantes los precios relativos, sólo afecta a la elección del consumidor *si y sólo si la renta real del consumidor se ve afectada*.

Como bien sabemos, un aumento del nivel de precios, si va acompañado de un aumento de la renta monetaria en la misma proporción, da lugar a que la renta real del consumidor no se vea alterada. En tal caso, la recta presupuestaria sería la misma y, dadas las preferencias, la elección del consumidor tampoco se alteraría.

Por tanto, para que una variación del nivel de precios afecte a la elección del consumidor, debe alterarse la recta presupuestaria, y para ello no puede permanecer constante la renta real de consumidor. Éste es precisamente el caso bien conocido en que el nivel de precios aumenta, permaneciendo constante la *renta monetaria*, y su efecto es como si tuviera lugar una reducción del nivel de renta real; de ahí un desplazamiento paralelo de la recta presupuestaria acercándose al origen de coordenadas. Con lo cual, la elección del consumidor se vería alterada.

Transformación monótona: demostración rápida

Sean u y v dos funciones de utilidad. La siguiente transformación $u = -e^{-v}$ *es una transformación monótona.*

La forma más rápida de demostrar que efectivamente se trata de una transformación monótona es la siguiente:

Obtengamos la primera derivada de esta función de transformación:

$$\frac{du}{dv} = e^{-v} > 0$$

La exponencial es siempre positiva cualquiera que sea el valor tomado por la función de utilidad v, por tanto, se trata de una transformación monótona.

Este método para concluir si una transformación de la función de utilidad es o no monótona es más directo que el que figura en la *Guía Didáctica*.

Allí se comprueba para dos valores de v y los correspondientes valores de u si el incremento en la utilidad dentro de la función v (dv) tiene el mismo signo que el incremento en la utilidad dentro de la función u (du). Se trata, por tanto, de una argumentación más pedagógica, pero menos contundente. Porque si dv y du tienen el mismo signo para dos valores cuales-

quiera de *v*, entonces esto equivale a decir que *la primera derivada de la función de transformación (du/dv) es positiva*.

Ésta es la forma de razonar cuando se propone una transformación de la forma *v=f(u)*, donde *u* y *v* son dos funciones de utilidad no especificadas. Aquí, la forma de argumentar es demostrar que la primera derivada $f'(u)$ es positiva (transformación monótona) o negativa (no es transformación monótona).

Ahora bien, cuando se trata de dos funciones de utilidad específicas, para saber si una de ellas es una transformación monótona de la otra, basta obtener la RMS de ambas funciones de utilidad y comparar. Si ambas RMS son iguales, entonces una cualquiera de las funciones de utilidad es una transformación de la otra. Si son diferentes ambas RMS, entonces la transformación no es monótona.

Transformación monótona: posible malentendido

Sean u y v dos funciones de utilidad. La siguiente transformación $u = v^2$ *es una transformación monótona cuando* $v \geq 0$ *; y no lo es cuando* $v < 0$.

La primera derivada de la función de transformación es: $du/dv = 2v$. Es evidente entonces que cuando $v > 0$ la transformación es monótona; y no lo es cuando $v < 0$.

¿Pero qué sucede cuando $v = 0$? La primera derivada se anula, luego no tenemos criterio para afirmar en principio que la transformación es monótona o que no lo es.

Ahora bien, la transformación que estamos manejando lo que hace es elevar al cuadrado los valores positivos de *v* y mantener nulo el valor cero de *v*. Esto conlleva que las cestas de bienes que toman un valor $v \geq 0$ en la función de utilidad *v* mantienen la misma ordenación dentro de la función de utilidad *u*. En consecuencia, la transformación que estamos manejando es monótona cuando $v \geq 0$.

Por otra parte, si tenemos dos funciones de utilidad, olvidándonos de la transformación realizada, una de ellas es una transformación monótona de la otra, si y sólo si la RMS adopta la misma forma funcional en ambas funciones de utilidad. Aquí está lo importante.

En consecuencia, se obtienen ambas RMS, se compara y se decide.

Como las funciones de utilidad que normalmente estamos manejando, como por ejemplo la Cobb-Douglas, toma valores positivos cuando se consume una cantidad positiva de ambos

bienes; y toma un valor cero cuando la cantidad consumida de alguno de los bienes es cero. Y la transformación usual es hacer que los exponentes a y b de la función de utilidad de partida sumen la unidad. Con lo que simplemente tendríamos que elevar tal función de utilidad al exponente $\frac{1}{a+b}$ con objeto de obtener los siguientes nuevos exponentes en la función de utilidad resultante de la transformación: $\frac{a}{a+b}$, $\frac{b}{a+b}$; los cuales obviamente suman la unidad.

Entonces este tipo de transformaciones son siempre monótonas incluso para el valor nulo de la función de utilidad de partida (cuando la cantidad consumida de alguno de los bienes es cero en una función de utilidad Cobb-Douglas estándar).

Preferencias cuasilineales

¿Por qué razón se utiliza la función del "ln" *(logaritmo neperiano) para la representación de las preferencias cuasilineales, si en principio cualquier función valdría? ¿Tiene que cumplir alguna condición esta función?*

Con objeto de que la derivada, es decir, la utilidad marginal del primer bien ($1/x_1$) sea decreciente a medida que aumenta la cantidad consumida de este bien.

Pero hay otros ejemplos de función de utilidad cuasilineal, no logarítmica, como puede verse en la Guía Didáctica, Capítulo 4.

En todos los casos la RMS resulta ser decreciente en valor absoluto a medida que aumenta la cantidad consumida del primer bien (x_1). Que es de lo que se trata.

Preferencias cuasilineales

La figura 4.6 del resumen del Tema 4 colgado en el curso virtual es incompatible con la función $\ln x_1$*, puesto que para* $x_1 = 0$ *el logaritmo tiende a menos infinito.*

Lógicamente, la figura y la función a que se hace referencia sólo tienen sentido cuando se consume una cantidad positiva del primer bien, es decir, cuando x_1 permanece positivo aunque tienda a cero.

Transformación monótona y RMS

Problema 4.7: ¿Qué explicación intuitiva puede darse al hecho de que una transformación monótona no altera la RMS?

La explicación intuitiva que da Varian no es del todo convincente. Lo único convincente es la demostración matemática contenida en el apéndice del capítulo.

La lógica de la explicación intuitiva que da Varian tiene alguna fuerza, pero no la suficiente, para convencer de por qué la RMS permanece invariante ante una transformación monótona de la función de utilidad.

Como la definición de la RMS sólo compara cestas muy próximas entre sí, en las que se alteran las cantidades consumidas de ambos bienes, que están situadas dentro de la misma curva de indiferencia. Y, además, sabemos que cualquier transformación monótona que se realice en la función de utilidad no altera en absoluto las cestas que forman parte de cada curva de indiferencia. Por tanto, cabe pensar a priori que la RMS definida dentro de una cualquiera de las curvas de indiferencia no se alterará con la transformación monótona de la función de utilidad.

Piénsese que la RMS es, por definición, la relación de intercambio de ambos bienes que está dispuesto a realizar el consumidor para permanecer dentro de la misma curva de indiferencia; es decir, la variación de la cantidad consumida del bien 2 dividida por la variación de la cantidad consumida del bien 1, cuando pasamos de una cesta de bienes a otra muy próxima situada en la misma curva de indiferencia. Entonces, si las cestas que forman parte de una cualquiera de las curvas de indiferencia no se alteran con la transformación monótona, cabe pensar que la RMS tampoco se verá afectada.

Ahora bien, si se interpreta que la RMS es el cociente de las utilidades marginales de ambos bienes, como también es posible, entonces tal explicación intuitiva de Varian no es en absoluto convincente a priori, porque una transformación monótona de la función de utilidad sí altera las utilidades marginales de los bienes.

Por ello, la explicación intuitiva de Varian de por qué la RMS permanece invariante con la transformación de la función de utilidad podría interpretarse en este caso más bien como una racionalización *ex post* para tratar de comprender el por qué de la demostración matemática incontestable contenida en el apéndice del capítulo, que sí es convincente por sí misma.

¿Función de utilidad aditiva y utilidades marginales decrecientes?

Dentro de la Utilidad Ordinal*, la RMS entre dos bienes es decreciente a media que aumenta la cantidad consumida de uno de ellos. En cambio, las utilidades marginales de ambos bienes no tienen por qué ser decrecientes, salvo si se trata de una función de utilidad aditiva.*

De hecho, se pone el ejemplo de una función de utilidad cuasilineal que sí cumple este requisito:

$$u(x_1, x_2) = \ln x_1 + bx_2$$

Pero no consigo deducir por qué el hecho de que la función de utilidad sea aditiva implica que las utilidades marginales de ambos bienes deban ser decrecientes.

Partimos de la definición de la relación marginal de sustitución (RMS):

$$RMS(x_1, x_2) = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{UM_1(x_1, x_2)}{UM_2(x_1, x_2)}$$

Es decir, tanto la RMS como las utilidades marginales de ambos bienes dependen en general de las cantidades consumidas de estos últimos.

Veamos cómo varía la RMS al variar la cantidad consumida del bien 1:

$$\frac{\partial RMS}{\partial x_1} = \frac{d^2 x_2}{dx_1^2} = -\frac{\left(UM_{11} + UM_{12}\frac{dx_2}{dx_1}\right)UM_2 - \left(UM_{21} + UM_{22}\frac{dx_2}{dx_1}\right)UM_1}{UM_2{}^2}$$

donde:

$$UM_{11} = \frac{\partial UM_1}{\partial x_1} \qquad UM_{22} = \frac{\partial UM_2}{\partial x_2} \qquad UM_{21} = \frac{\partial UM_2}{\partial x_1} \qquad UM_{12} = \frac{\partial UM_1}{\partial x_2}$$

Introduciendo ahora en esta expresión dx_2/dx_1 en función de las utilidades marginales de ambos bienes, y recordando que:

$$\frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = UM_{12} = UM_{21} = \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1}$$

llegamos a la siguiente expresión final:

$$\frac{\partial RMS}{\partial x_1} = \frac{d^2 x_2}{dx_1^2} = -\frac{UM_{11}UM_2{}^2 + UM_{22}UM_1{}^2 - 2UM_{12}UM_1UM_2}{UM_2{}^3}$$

Puesto que las utilidades marginales de ambos bienes son positivas, el denominador de esta expresión es positivo y el numerador debe ser negativo para que la expresión en conjunto sea positiva. Es decir, para que la RMS crezca a medida que aumenta la cantidad consumida del primer bien. Como la RMS es negativa, ello implica que es decreciente en valor absoluto a medida que aumenta la cantidad consumida del primer bien, que es lo que pretendemos.

En consecuencia, debe cumplirse que:

$$UM_{11}UM_2^{\;2} + UM_{22}UM_1^{\;2} - 2UM_{12}UM_1UM_2 < 0$$

para que la RMS sea decreciente en valor absoluto a medida que aumenta la cantidad consumida del primer bien.

Pero de aquí no se infiere que necesariamente las utilidades marginales de ambos bienes deban ser decrecientes, tal como exige la *utilidad cardinal*. Es decir, que UM_{11} y UM_{22} deban ser negativas. Porque como $\frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = UM_{12} = UM_{21}$ es positiva, es decir, la variación de la utilidad total al variar infinitesimalmente la cantidad consumida de ambos bienes simultáneamente (si aumenta la cantidad consumida de ambos bienes simultáneamente debe incrementarse el nivel de utilidad del consumidor). En tal caso, puede suceder que todas o algunas de las utilidades marginales de los bienes no sean decrecientes (pueden ser crecientes) y sin embargo la RMS sea decreciente en valor absoluto.

Luego la exigencia de la utilidad ordinal de que la RMS sea decreciente en valor absoluto, es menos restrictiva que la exigencia de la utilidad cardinal de que las utilidades marginales de todos los bienes sean decrecientes.

Ahora bien, en una función de utilidad aditiva, como la que se pone como ejemplo, referida a la función de utilidad cuasilineal de más arriba, se cumple que $UM_{12} = UM_{21} = 0$; es decir*, la utilidad marginal de cada uno de los bienes no depende en absoluto de la cantidad consumida del otro bien* (esto es lo que define a las funciones de utilidad aditivas). En tal caso, en la última expresión debe cumplirse que la utilidad marginal debe ser decreciente para algún bien y no creciente para los restantes con objeto de garantizar bajo cualquier circunstancia que la RMS es siempre decreciente en valor absoluto.

En nuestro caso de la función de utilidad cuasilineal, la utilidad marginal del primer bien es decreciente ($UM_{11} < 0$) y la del segundo constante ($UM_{22} = 0$), y por ello está garantizado el decrecimiento e